Став 3.7. *Нека је $\mu : \mathcal{I} \to [0, +\infty]$ функција дефинисана на полуалгебри $\mathcal{I}$ подскупова скупа X са својствима:*

1° $\mu(\emptyset) = 0$.
2° *Ако је $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, при чему $A_n \in \mathcal{I}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{I}$, онда је* $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Тада постоји тачно једна мера $\widehat{\mu}$ на алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ генерисаној полуалгебром $\mathcal{I}$ таква да је $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ за свако A из $\mathcal{I}$.

△ Из 1° и 2° следи коначна адитивност функције μ на $\mathcal{I}$, па се применом става 3.3 добија јединственост $\widehat{\mu}$. Преостаје нам да покажемо да је коначно адитивна мера $\widehat{\mu}$ добијена ставом 3.3 заправо мера. Нека је $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где скупови A и A_n припадају $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$. Тада те скупове можемо разложити на скупове из полуалгебре $\mathcal{I}$: $A = \bigsqcup_{k=1}^{K} E_k$, $A_n = \bigsqcup_{k_n=1}^{K_n} E_{k_n}^{(n)}$. За свако $k = 1, \ldots, K$ имамо разлагање

$$E_k = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E_k \cap A_n) = \bigsqcup_{\substack{1 \le n \\ 1 \le k_n \le K_n}} E_k \cap E_{k_n}^{(n)}$$

скупа $E_k \in \mathcal{I}$ на скупове $E_k \cap E_{k_n}^{(n)} \in \mathcal{I}$. Из 2° следи да је

$$\mu(E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_n=1}^{K_n} \mu(E_k \cap E_{k_n}^{(n)}).$$

Сумирајући претходну једначину по k и имајући у виду да је $E_{k_n}^{(n)} = E \cap E_{k_n}^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{K} E_k \cap E_{k_n}^{(n)}$ добијамо

$$\widehat{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{K} \mu(E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_n=1}^{K_n} \sum_{k=1}^{K} \mu(E_k \cap E_{k_n}^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_n=1}^{K_n} \mu(E_{k_n}^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\mu}(A_n),$$

што доказује σ адитивност за $\widehat{\mu}$.

□

Да бисмо применили овај став на ситуацију коју разматрамо, фиксирајмо низ $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ основних интервала чија је унија $I = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n$ такође основни интервал. Из монотоности и коначне адитивности добијамо

$$m_\alpha(I) \ge m_\alpha\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} I_n\Big) = \sum_{k=1}^{n} m_\alpha(I_k),$$

а како та неједнакост важи за свако n, онда преласком на лимес добијамо

$$m_\alpha(I) \ge \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(I_n). \tag{3.5}$$

Обрнута неједнакост очито важи ако је $m_\alpha(I_n) = +\infty$ за неко n, па зато надаље претпостављамо да је $m_\alpha(I_n) < +\infty$ за свако n.

ЛЕМА 3.8. ***Нека је I основни интервал такав да је $m_\alpha(I) < +\infty$ и нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоје основни интервали I' и I'', компактан скуп K и отворен скуп V такви да је***

$$I' \subset K \subset I \subset V \subset I'',$$

$$m_\alpha(I) - \varepsilon < m_\alpha(I') \leq m_\alpha(I) \leq m_\alpha(I'') < m_\alpha(I) + \varepsilon.$$

△ Случај $I = \emptyset$ је тривијалан, тада можемо узети $K = V = I' = I'' = \emptyset$. Нека је I непразан. Ако је $I = [a, b)$ онда из непрекидности слева следи да постоје s и t такви да је $s < a < t < b$, $\alpha(s) > \alpha(a) - \varepsilon$ и $\alpha(t) > \alpha(b) - \varepsilon$, па узмимо $I' = [a, t)$, $K = [a, t]$, $V = (s, b)$ и $I'' = [s, b)$. Ако је пак $I = (-\infty, b)$ онда из непрекидности слева следи да постоје s и t такви да је $-\infty < s < t < b$, $\alpha(s) - \alpha(-\infty) < \varepsilon/2$ и $\alpha(b) - \alpha(t) < \varepsilon/2$. Нека је, у том случају, $I' = [s, t)$, $K = [s, t]$, $V = I'' = I$.

У оба случаја су I' и I'' основни интервали, V је отворен, а K је компактан и $I' \subset K \subset I \subset V \subset I''$. Осим тога, у првом случају је $m_\alpha(I \setminus I') = m_\alpha([t, b)) = \alpha(b) - \alpha(t) < \varepsilon$, а и у другом случају је $m_\alpha(I \setminus I') = m_\alpha((-\infty, s)) + m_\alpha([t, b)) < \varepsilon$. Затим, у првом случају је $m_\alpha(I'' \setminus I) = m_\alpha([s, a)) = \alpha(a) - \alpha(s) < \varepsilon$, а у другом случају је та неједнакост тривијална. □

Приметимо да за сваки основни интервал I важи

$$m_\alpha(I) = \sup\{m_\alpha(I_*) : I_* \in \mathfrak{I}^1,\, I_* \subset I,\, m_\alpha(I_*) < +\infty\}. \tag{3.6}$$

Ако је $m_\alpha(I) < +\infty$, онда је горња релација очигледна јер можемо узети $I_* = I$. Претпоставимо да је $m_\alpha(I) = +\infty$. Ако је $I = (-\infty, b)$ бирамо $I_n = [-n, b)$ ако је $b \in \mathbb{R}$, ако је $I = [a, +\infty)$ онда бирамо $I_n = [a, n)$, а ако је $I = (-\infty, +\infty)$ онда бирамо $I_n = [-n, n)$. У сва три случаја је $\lim_{n\to\infty} m_\alpha(I_n) = +\infty$ и $I_n \in \mathfrak{I}^1$, што доказује (3.6), јер за I_* можемо узети I_n за довољно велико $n \in \mathbb{N}$.

Фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и основни интервал $I_* \subset I$ такав да је $m_\alpha(I_*) < +\infty$. На основу леме 3.8 постоје компактан скуп $K \subset I_*$, основни интервал $I'_* \subset K$, низ $V_n \supset I_n$ отворених скупова и низ $I''_n \supset V_n$ основних интервала таквих да је $m_\alpha(I'_*) > m_\alpha(I_*) - \varepsilon$ и $m_\alpha(I''_n) < m_\alpha(I_n) + 2^{-n}\varepsilon$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$K \subset I_* \subset I = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

па можемо издвојити коначно потпокривање $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} V_i$ компактног скупа K. Тада је и $I'_* \subset K \subset \bigcup_{n=1}^{N} V_i \subset \bigcup_{n=1}^{N} I''_n$, одакле следи

$$m_\alpha(I_*) \leq m_\alpha(I'_*) + \varepsilon \leq m_\alpha\Big(\bigcup_{n=1}^{N} I''_n\Big) + \varepsilon \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} m_\alpha(I''_n)$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \Big[m_\alpha(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big] < 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{N} m_\alpha(I_n) < 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(I_n).$$

С обзиром да је $\varepsilon > 0$ произвољно, доказали смо $m_\alpha(I_*) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(I_n)$. Узимањем супремума по левој страни претходне неједнакости на основу (3.6) следи тражена неједнакост $m_\alpha(I) \le \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(I_n)$. Овим смо заправо доказали следећу теорему.

Теорема 3.9. *Ако је α растућа, непрекидна с лева функција на $\mathbb{R}$, онда постоји јединствена мера m_α на алгебри $\mathfrak{E}$ елементарних скупова на $\mathbb{R}$ таква да је $m_\alpha([-\infty, b)) = \alpha(b) - \alpha(-\infty)$ и $m_\alpha([a, b)) = \alpha(b) - \alpha(a)$ за све $-\infty < a < b \le +\infty$.*

Уколико је $\alpha(x) = x$, уместо m_α пишемо m.

Показаћемо да су и коначно адитивне мере m_d на $\mathfrak{E}^d$ заправо мере. Доказ је сличан управо изведеном за мере m_α, наиме довољно је доказати σ адитивност на полуалгебри $\mathfrak{I}^d$. Дакле, нека је $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ међусобно дисјунктних основних квадара такав да је и $Q = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ основни квадар. Аналогно доказу формуле (3.5) добијамо да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_d(Q_n) \le m_d(Q).$$

Обрнута неједнакост очито важи ако је $m_d(Q_n) = +\infty$ (јер је тада и $m_d(Q) = +\infty$), надаље претпостављамо да је $m_d(Q_n) < \infty$ за свако n, то јест да су сви квадри Q_n ограничени. Улогу леме 3.8 у овом случају преузима следећа лема.

Лема 3.10. *Нека је Q ограничен основни квадар у $\mathbb{R}^d$ и нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоје основни квадри Q' и Q'', компактан скуп K и отворен скуп V такви да је $Q' \subset K \subset Q \subset V \subset Q''$ и*

$$m_d(Q) - \varepsilon < m_d(Q') \le m_d(Q) \le m_d(Q'') < m_d(Q) + \varepsilon.$$

$\triangle$ Случај $Q = \emptyset$ је тривијалан, као и у претходној леми. У супротном имамо $Q = \prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i)$, $-\infty < a_i < b_i < +\infty$. Нека је $Q' = \prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i - \delta)$, $K = \prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i - \delta]$, $V = \prod_{i=1}^{d}(a_i - \delta, b_i)$ и $Q'' = \prod_{i=1}^{d}[a_i - \delta, b_i)$. Јасно је да за довољно мало $\delta > 0$ скупови Q', K, V и Q'' испуњавају тражене услове. $\Box$

Такође, за сваки основни квадар $Q \subset \mathbb{R}^d$ важи $m_d(Q) = \sup m_d(Q_*)$, где се супремум узима по свим ограниченим основним квадрима Q_* садржаним у Q. Даље доказ иде **дословним** понављањем доказа за мере m_α уз очиту замену I, I_n и m_α одговарајућим Q, Q_n и m_d. Према томе, важи следећа теорема.

Теорема 3.11. *Постоји јединствена мера m_d на алгебри $\mathfrak{E}^d$ елементарних скупова у $\mathbb{R}^d$ таква да је за сваки основни квадар Q у $\mathbb{R}^d$ његова мера $m_d(Q)$ једнака његовој запремини.*

Мере m_d су транслаторно инваријантне: ако је A елементаран скуп у $\mathbb{R}^d$ и ако је $x \in \mathbb{R}^d$, онда је $x + A$ такође елементаран скуп у $\mathbb{R}^d$ за који важи $m_d(x + A) = m_d(A)$.

2.4. Проблем продужења. Покажимо сада да проблем, наведен у уводу, продужења транслаторно инваријантне мере m са алгебре $\mathfrak{E}$ на $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ уз очување својства пребројиве адитивности нема решења. Наиме, доказаћемо следећи став.

Став 3.12. *Не постоји транслаторно инваријантна мера μ, дефинисана на алгебри свих подскупова реалне праве, таква да је $\mu([a, b)) = b - a$ за све $a < b$.*

3. Сигма алгебре

Дефиниција 3.10. *Фамилија $\mathfrak{M}$ подскупова скупа X је σ* **алгебра** *на X ако има следећа својства:*

1° $X \in \mathfrak{M}$,

2° ако $A \in \mathfrak{M}$, онда $X \setminus A \in \mathfrak{M}$,

3° ако је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ скупова из $\mathfrak{M}$, онда $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

У том случају кажемо да је $(X, \mathfrak{M})$ мерљив простор, а скупове из $\mathfrak{M}$ називамо мерљивим скуповима, прецизније $\mathfrak{M}$-мерљивим скуповима ако је потребно нагласити о којој се σ алгебри ради.

Из 1° и 2° следи да $\emptyset = X \setminus X \in \mathfrak{M}$. Затим, ако $A, B \in \mathfrak{M}$, онда и $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \in \mathfrak{M}$ на основу својства 3°. Дакле, свака σ алгебра је алгебра. Даље,

4° Ако $A_n \in \mathfrak{M}$ за $n = 1, 2, \ldots$, онда $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

Заиста, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n) \in \mathfrak{M}$.

Једноставан пример σ алгебре на скупу X је партитивни скуп $\mathbb{P}(X)$. Нетривијалне примере σ алгебри добијамо уз помоћ следећег става.

Став 3.14. [генерисање σ алгебри] ***Нека је $\mathfrak{F}$ фамилија подскупова скупа X. Тада постоји минимална σ алгебра $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ на X која садржи $\mathfrak{F}$.***

Прецизније, постоји јединствена фамилија $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ подскупова скупа X са својствима:

1° *$\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ је σ алгебра на X,*
2° *$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$,*
3° ***Ако је $\mathfrak{M}$ сигма алгебра на X која садржи $\mathfrak{F}$ (тј. ако $\mathfrak{M}$ има својства 1° и 2°, онда је $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$.***

$\triangle$ Ради доказа егзистенције тражене σ алгебре посматрајмо $\mathcal{M}_{\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M}$ има својства 1° и 2° $\}$ и нека је $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}} = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{F}}} \mathfrak{M}$. Како је $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ за свако $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{F}}$ видимо да важи 2°. Затим, ако је $\mathfrak{M}$ сигма алгебра на X која садржи $\mathfrak{F}$, онда је $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{F}}$, па је $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ и важи 3°. На крају, нека $A_n \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека је $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Ако је $\mathfrak{M}$ сигма алгебра на X која садржи $\mathfrak{F}$, онда $A_n \in \mathfrak{M}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је зато $A \in \mathfrak{M}$. Следи $A \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, тј. $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ има својство 3°, а слично се доказује да има својства 1° и 2°.

Јединственост σ алгебре која задовољава 1°, 2° и 3° последица је јединствености минимума (онда кад постоји) у сваком уређеном скупу, због антирефлексивности сваког уређења. Овде је то примењено на $\mathcal{M}_{\mathfrak{F}}$ по основу 3°. $\square$

Дефиниција 3.11. *Сигма алгебру $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ зовемо σ* ***алгебром генерисаном фамилијом*** *$\mathfrak{F}$.*

Наравно, различите фамилије $\mathfrak{F}$ могу генерисати исту σ алгебру, пример је садржан у следећем ставу.

Став 3.15. ***Сигма алгебре на $\mathbb{R}^d$ генерисане фамилијама $\mathfrak{I}^d$ (полуалгебром d-димензионалних основних квадара), $\mathfrak{E}^d$ (алгебром елементарних скупова на $\mathbb{R}^d$) и фамилијом $\mathcal{O}^d = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}$ отворених скупова у $\mathbb{R}^d$ су међусобно једнаке.***

$\triangle$ Означимо те σ алгебре редом $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^d}$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{E}^d}$ и $\mathfrak{S}_{\mathcal{O}^d}$. С обзиром да је $\mathfrak{I}^d \subset \mathfrak{E}^d$ имамо да је $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^d} \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{E}^d}$.

Како је сваки елементаран скуп на $\mathbb{R}^d$ коначна унија d-димензионалних основних квадара, следи да $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^d}$ садржи $\mathfrak{E}^d$, а тиме и $\mathfrak{S}_{\mathfrak{E}^d}$. Дакле, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^d} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{E}^d}$. Сваки отворен скуп у $\mathbb{R}^d$ се може, на основу леме 1.6 представити као пребројива унија d-димензионалних основних квадара (са, на пример, рационалним координатама својих врхова), па је $\mathcal{O}^d \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^d}$, одакле следи $\mathfrak{S}_{\mathcal{O}^d} \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^d}$. Даље, сваки основни интервал I на правој се може представити у облику $I = \bigcap_{n=1}^\infty V_n$, где су скупови V_n отворени: у случају $I = [a, b)$ можемо узети $V_n = (a - 1/n, b)$, а у случају $I = (-\infty, b)$ можемо узети $V_n = I$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, за дати основни квадар $Q = \prod_{i=1}^d I_k \in \mathfrak{I}^d$, можемо за свако $1 \le i \le d$ формирати по један низ $\{V_n^{(i)}\}_{n=1}^\infty$ отворених скупова на $\mathbb{R}$ са својством $I_i = \bigcap_{n=1}^\infty V_n^{(i)}$. Тада је $Q = \prod_{i=1}^d \bigcap_{n=1}^\infty V_n^{(i)} = \bigcap_{n=1}^\infty \prod_{i=1}^d V_n^{(i)}$, при чему су скупови $\prod_{i=1}^d V_n^{(i)}$ отворени у $\mathbb{R}^d$. Следи да $\mathfrak{S}_{\mathcal{O}^d}$ садржи све основне квадре у $\mathbb{R}^d$, а тиме и $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}^d}$. $\square$

Сигма алгебру из претходног става називамо σ алгебром **Borel[4]-ових** скупова на $\mathbb{R}^d$, означавамо је са $\mathfrak{B}^d$ (тј. $\mathfrak{B}^d = \mathfrak{S}_{\mathfrak{J}^d} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{E}^d} = \mathfrak{S}_{\mathcal{O}^d}$), или поједностављено $\mathfrak{B}$ ако је из контекста јасно о којој димензији d је реч. Општије, Borel-ови подскупови метричког простора X се дефинишу на следећи начин:

Дефиниција 3.12. *Нека је X метрички простор. σ алгебру на X генерисану фамилијом свих отворених подскупова од X зовемо* ***Borel-овом σ алгебром*** *на простору X, а њене елементе* ***Borel-овим подскуповима*** *простора X.*

Како је комплемент отвореног скупа затворен, видимо да су затворени скупови у X Borel-ови скупови. Специјално, сваки једночлан подскуп од X је Borel-ов, јер је затворен. Даље, сваки пребројив скуп у X је Borel-ов, јер је пребројива унија једночланих скупова. На пример, скуп $\mathbb{Q}$ рационалних бројева је Borel-ов подскуп реалне праве, баш као и скуп свих ирационалних бројева који је његов комплемент. Ова два примера показују да постоје Borel-ови скупови на $\mathbb{R}$ који нису елементарни.

На крају формулишимо један критеријум.

Став 3.16. ***Да би фамилија $\mathfrak{M}$ подскупова скупа X била σ алгебра на X неопходно је и довољно да буде алгебра на X са додатним својством да за сваки низ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ међусобно дисјунктних скупова из $\mathfrak{M}$ и $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ такође припада $\mathfrak{M}$.***

△ Неопходност смо већ показали. Обрнуто, нека је $\mathfrak{M}$ алгебра на X са горњим својством и нека је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ скупова из $\mathfrak{M}$. Уведимо $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ за све $n \geq 2$. Тада су B_n међусобно дисјунктни скупови из $\mathfrak{M}$, па из претпоставке следи да је $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}$. □

ђ) важи $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, ако је $A_{n+1} \subset$

4. Продужење мере

Ми смо већ показали да је m_α мера на алгебри $\mathfrak{E}$ елементарних скупова на $\mathbb{R}$, уколико је α растућа и непрекидна слева. Дакле, m_α има важно својство пребројиве адитивности, али фамилија скупова $\mathfrak{E}$ није σ алгебра. Алгебра $\mathfrak{E}$ је садржана у σ алгебри $\mathfrak{B}$, наш циљ је да продужимо меру m_α са $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{B}$ тако да то продужење буде опет мера, дакле, да се сачува својство пребројиве адитивности.

Поступак проширења мере са алгебре на њом генерисану σ алгебру се може извести и у апстрактној ситуацији. Дакле, претпоставићемо да имамо меру μ на алгебри $\mathcal{A}$ на скупу X; нека је $\mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ сигма алгебра генерисана алгебром $\mathcal{A}$. Ми желимо решити проблем продужења, то јест продужити меру μ до мере на σ алгебри $\mathfrak{M}$ која садржи $\mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$.

4.1. Спољна мера. Претпоставимо да је горе описан проблем решен, тј. да имамо продужење $\widehat{\mu} : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ мере μ. Ако је $A \in \mathfrak{M}$ и ако је $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ скупова из $\mathcal{A}$ који покрива A (тј. ако је $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$), онда из пребројиве субадитивности мере следи да је

$$\widehat{\mu}(A) \leq \sum_n \mu(E_n).$$

Одатле пак следи да је $\widehat{\mu}(A)$ мање или једнако од инфимума свих горњих сума, где се инфимум узима по свим могућим покривањима скупа A скуповима E_n из $\mathcal{A}$. То нас мотивише да уведемо следећу дефиницију.

Дефиниција 3.13. *За меру μ на алгебри $\mathcal{A}$ дефинише се њена* ***спољна мера*** *$\mu^* : \mathbb{P}(X) \to [0, +\infty]$* ***генерисана мером*** *μ формулом*

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \mathcal{A} \text{ за свако } n \in \mathbb{N}\Big\} \quad \text{за дато } A \subset X.$$

Другим речима, инфимум се узима по свим пребројивим покривањима скупа A скуповима из $\mathcal{A}$ и треба да буде $\widehat{\mu} \leq \mu^*$ за продужење $\widehat{\mu}$ мере μ.

Дефиниција је коректна, јер се сваки скуп $A \subset X$ може прекрити низом $E_n = X$ скупова из $\mathcal{A}$. Покажимо да μ^* има следећа својства:

1° $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2° Ако је $A \subset B$, онда је $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3° $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.
4° $\mu^*(E) = \mu(E)$ ако је $E \in \mathcal{A}$.

Својство 1° следи из релације $\emptyset \subset \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$. Својство 2° следи из чињенице да је свако покривање скупа B истовремено и покривање скупа A. Докажимо својство 3°. Ако је $\mu^*(A_n) = +\infty$ за неко n неједнакост је тривијална, па зато претпостављамо да је $\mu^*(A_n) < +\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Фиксирајмо $\varepsilon > 0$. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји низ скупова $\{E_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{A}$ такав да је $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k^{(n)}) \leq \mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$. Скупови $E_k^{(n)} \in \mathcal{A}$ чине пребројиво покривање скупа $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, тј. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,k\geq 1} A_k^{(n)}$, па је

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n,k\geq 1} \mu(E_k^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k^{(n)})$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon\Big) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Одавде, кад $\varepsilon \to 0$, добијамо 3°. Коначно, нека је E из $\mathcal{A}$. На основу тривијалног покривања $E = E \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ закључујемо $\mu^*(E) \leq \mu(E)$. С друге стране, ако је $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ једно покривање скупа E скуповима из $\mathcal{A}$ онда је $E = E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap E_n)$, при чему $E \cap E_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па из пребројиве субадитивности мере μ следи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap E_n) \geq \mu(E).$$

Како је покривање $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ било произвољно, следи $\mu^*(E) \geq \mu(E)$, па је доказано и својство 4°.

Прва три својства ћемо издвојити у следећој дефиницији.

Дефиниција 3.14. *Функција* $\nu : \mathbb{P}(X) \to [0, +\infty]$ *је* ***спољна мера*** *на* X *ако има следећа својства:*

а) $\nu(\emptyset) = 0$.
б) *Ако је* $A \subset B$, *онда је* $\nu(A) \leq \nu(B)$.
в) $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

Видели смо да је μ^* спољна мера. Својство 4° нам каже да је μ^* продужење мере μ на $\mathbb{P}(X)$. Међутим, μ^* не мора бити мера, штавише не мора бити ни коначно адитивна мера. Проблем је што смо μ продужили на највећу σ алгебру на X, наиме на $\mathbb{P}(X)$, али смо у том процесу изгубили својство пребројиве адитивности које је μ имала на $\mathcal{A}$. Следећи корак је да сузимо μ^* на мању σ алгебру на којој ће се рестрикција спољне мере μ^* показати као мера. Тај корак се може обавити са произвољном спољном мером, која није нужно настала од мере на алгебри.

4.2. Мера индукована спољном мером.

Дефиниција 3.15. *Нека је* ν *спољна мера на* X. *Кажемо да је скуп* $E \subset X$ *мерљив (прецизније,* ν-***мерљив***) ако је

$$\boxed{\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^{\complement}) \qquad \text{за свако } A \subset X.} \tag{3.7}$$

Фамилију свих ν мерљивих скупова ћемо означавати са $\mathfrak{M}_\nu$. Показаћемо да је $\mathfrak{M}_\nu$ једна σ алгебра на X и да је рестрикција ν на $\mathfrak{M}_\nu$ заиста мера. Почнимо са следећом лемом.

Лема 3.17. *$\mathfrak{M}_\nu$ је алгебра.*

$\triangle$ Из (3.7), користећи $\nu(\emptyset) = 0$, следи да је $X \in \mathfrak{M}_\nu$. Ако је $E \in \mathfrak{M}_\nu$, онда из (3.7) следи да је и E^{C} такође из $\mathfrak{M}_\nu$. Према томе довољно је доказати да из $E, F \in \mathfrak{M}_\nu$ следи $E \cup F \in \mathfrak{M}_\nu$. Дакле, нека су E и F из $\mathfrak{M}_\nu$. Примењујући (3.7) на $A \cap (E \cup F)$ имамо

$$\begin{aligned}\nu(A \cap (E \cup F)) &= \nu(A \cap (E \cup F) \cap E) + \nu(A \cap (E \cup F) \cap E^{\mathsf{C}})\\ &= \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^{\mathsf{C}} \cap F),\end{aligned}$$

слично добијамо и

$$\nu(A \cap E^{\mathsf{C}}) = \nu(A \cap E^{\mathsf{C}} \cap F) + \nu(A \cap E^{\mathsf{C}} \cap F^{\mathsf{C}}),$$

па следи

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^{\mathsf{C}}) &= \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^{\mathsf{C}} \cap F) + \nu(A \cap E^{\mathsf{C}} \cap F^{\mathsf{C}})\\ &= \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \cap (E \cup F)^{\mathsf{C}}),\end{aligned}$$

одакле добијамо ν-мерљивост скупа $E \cup F$. $\square$

Из својстава а) и в) следи да је $\nu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \le \sum_{i=1}^n \nu(A_i)$, па из једнакости $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^{\mathsf{C}})$ добијамо $\nu(A) \le \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^{\mathsf{C}})$ за свака два скупа $A, E \subset X$. Дакле, да би скуп $E \subset X$ био ν-мерљив довољно је доказати

$$\nu(A) \ge \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^{\mathsf{C}}) \text{ за сваки скуп } A \subset X. \tag{3.8}$$

Овај критеријум ћемо искористити у следећем ставу.

СТАВ 3.18. *$\mathfrak{M}_\nu$ је σ алгебра, а рестрикција ν на $\mathfrak{M}_\nu$ је мера.*

$\triangle$ Нека је $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ низ међусобно дисјунктних скупова из $\mathfrak{M}_\nu$ чија је унија скуп E. Користећи ν мерљивост скупова E_i имамо

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(A \cap E_1) + \nu(A \cap E_1^{\mathsf{C}})\\ &= \nu(A \cap E_1) + \nu(A \cap E_1^{\mathsf{C}} \cap E_2) + \nu(A \cap E_1^{\mathsf{C}} \cap E_2^{\mathsf{C}})\\ &= \nu(A \cap E_1) + \nu(A \cap E_2) + \nu(A \cap E_1^{\mathsf{C}} \cap E_2^{\mathsf{C}})\\ &= \ldots = \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k) + \nu(A \bigcap_{k=1}^n E_k^{\mathsf{C}})\\ &\ge \nu\Big(A \cap \bigcap_{k=1}^\infty E_k^{\mathsf{C}}\Big) + \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k) = \nu(A \cap E^{\mathsf{C}}) + \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k).\end{aligned}$$

Дакле, $\nu(A) \ge \nu(A \cap E^{\mathsf{C}}) + \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k)$ за свако n, па је

$$\begin{aligned}\nu(A) &\ge \nu(A \cap E^{\mathsf{C}}) + \sum_{k=1}^\infty \nu(A \cap E_k)\\ &\ge \nu(A \cap E^{\mathsf{C}}) + \nu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty (A \cap E_k)\Big) = \nu(A \cap E^{\mathsf{C}}) + \nu(A \cap E),\end{aligned}$$

што, на основу (3.8), доказује мерљивост скупа E. С обзиром да већ знамо да је $\mathfrak{M}_\nu$ алгебра, из става 3.16 следи да је $\mathfrak{M}_\nu$ сигма алгебра. Осим тога, горње неједнакости се своде на једнакости, па је

$$\nu(A) = \nu(A \cap E^{\complement}) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap E_n) \ \text{ за свако } \ A \subset X,$$

специјално, за $A = E$ имамо $\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$, па је доказана и σ адитивност функције ν на σ алгебри $\mathfrak{M}_\nu$. □

Дефиниција 3.16. *Мера μ на σ алгебри $\mathfrak{M}$ на скупу X је* **комплетна** *ако из $B \subset A$ за неко $A \in \mathfrak{M}$ са својством $\mu(A) = 0$ следи да је $B \in \mathfrak{M}$.*

Тада је, наравно, $\mu(B) = 0$. Приметимо да је мера која се јавља у горњем ставу комплетна. Заиста, ако је $E \subset X$, $\nu(E) = 0$, онда је $\nu(A \cap E) = 0$ за свако $A \subset X$, па на основу (3.8) следи да је E из $\mathfrak{M}_\nu$, те је комплетност ове мере у суштини последица монотоности спољне мере ν.

4.3. Продужење мере. Нека је μ мера на алгебри $\mathcal{A}$ на скупу X, нека је μ^* спољна мера индукована мером μ, нека је $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ сигма алгебра свих μ^* мерљивих скупова и нека је $\tilde{\mu}$ мера добијена рестрикцијом μ^* на $\mathfrak{M}_{\mu^*}$. Следећи став показује да је σ алгебра $\mathfrak{M}$ довољно богата.

Став 3.19. $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_{\mu^*}$.

△ Нека је $E \in \mathcal{A}$ и нека је $A \subset X$. Нека је $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ произвољно покривање скупа A скуповима A_n из $\mathcal{A}$. Тада такође имамо и покривања $A \cap E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)$ и $A \cap E^{\complement} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E^{\complement})$, при чему је $A_n \cap E, A_n \cap E^{\complement} \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Следи да је

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\complement}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E^{\complement}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\mu(A_n \cap E) + \mu(A_n \cap E^{\complement}) \Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

С обзиром да је покривање $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ било произвољно, узимајући инфимум по свим таквим покривањима добијамо релацију (3.8), која доказује μ^* мерљивост скупа E. □

Горе описани поступак којим се мера μ на алгебри $\mathcal{A}$ продужује до мере $\tilde{\mu}$ на σ алгебри $\mathfrak{M}_\nu \supset \mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ је увео Caratheodory[5]. Дакле, $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ је σ алгебра која садржи $\mathcal{A}$, па тиме и σ алгебру $\mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ генерисану алгебром $\mathcal{A}$. То је део следеће основне теореме о продужењу.

Теорема 3.20. **[Caratheodory-ја о продужењу мере]** ***Мера $\tilde{\mu} : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ је продужење мере $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ на σ алгебру $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ која садржи $\mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$. Мера $\tilde{\mu}$ је комплетна мера.***

[5] Каратеодори– Constantin Caratheodory (1873–1950)

△ Сва тврђења ове теореме су у ствари већ доказана. Подсетимо се: ако је $E \in \mathcal{A}$, онда је $\mu(E) = \mu^*(E)$ на основу својства 4° спољних мера индукованих мером; знамо да је $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$, па је $E \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$ и $\widetilde{\mu}(E) = \mu^*(E) = \mu(E)$. Дакле, $\widetilde{\mu}$ је заиста продужење мере μ. Горе смо напоменули да $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ садржи $\mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$, а раније смо доказали да је $\widetilde{\mu}$ комплетна. □

Добијени резултати се могу применити на меру m_α, дефинисану на алгебри $\mathfrak{E}$ елементарних скупова на реалној правој помоћу растуће и непрекидне слева функције $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тиме добијамо спољне мере m_α^* и комплетне мере $\widetilde{m_\alpha}$ које продужују m_α са $\mathfrak{E}$ на σ алгебре $\mathfrak{M}_{m_\alpha^*}$. Свака од σ алгебри $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}_{m_\alpha^*}$ садржи, на основу горње теореме, σ алгебру Borel-ових скупова $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{E}}$ на $\mathbb{R}$. Да бисмо поједноставили ознаке, са m_α ћемо означавати и продужење $\widetilde{m_\alpha}$ мере m_α, по овом договору $m_\alpha(E)$ је дефинисано (барем) за сваки Borel-ов скуп $E \subset \mathbb{R}$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.17. *Меру $m_\alpha : \mathfrak{M}_\alpha \to [0, +\infty]$ (односно $\widetilde{m_\alpha}$) из теореме 3.20 зовемо* ***Lebesgue-Stieltjes[6]-овом мером*** *генерисаном непрекидном слева и растућом функцијом $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а σ алгебру $\mathfrak{M}_\alpha$ одговарајућом* ***Lebesgue-Stieltjes-овом σ алгебром.***

У случају $\alpha(x) = x$ пишемо $m_\alpha = m$ и $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}$, меру m зовемо Lebesgue-овом мером на $\mathbb{R}$, а $\mathfrak{M}$ сигма алгебром Lebesgue мерљивих скупова (на $\mathbb{R}$).

Друга примена горњих резултата је на мере m_d. Тиме добијамо продужење мере m_d путем одговарајуће d-димензионе спољне мере m_d^*, добијено продужење ћемо звати Lebesgue-овом (d-димензионом) мером, а добијену σ алгебру на $\mathbb{R}^d$ сигма алгебром Lebesgue мерљивих скупова, коју означавамо са $\mathfrak{M}_d$, или просто $\mathfrak{M}$. Тако продужену меру ћемо такође означавати са m_d, или просто са m када је јасно о којој је димензији реч. Наравно, у случају $d = 1$, добијена мера се поклапа са Lebesgue-овом мером m на $\mathbb{R}$.

Мере m_d су транслаторно инваријантне на алгебрама $\mathfrak{E}^d$ елементарних скупова у $\mathbb{R}^d$, па је зато и спољна Lebesgue-ова мера m_d^* транслаторно инваријантна. Одатле следи да је $x + E$ Lebesgue мерљив кад год је $E \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue мерљив и да је тада $m_d(x + E) = m_d(E)$ за свако $x \in \mathbb{R}^d$. Дакле, Lebesgue-ова мера у $\mathbb{R}^d$ је транслаторно инваријантна. Осим тога, мера m_d има и следеће својство

$$m_d(V) > 0 \qquad \text{за сваки отворен непразан скуп } V \subset \mathbb{R}^d, \tag{3.9}$$

које следи из чињенице да сваки непразан отворен скуп $V \subset \mathbb{R}^d$ садржи основни квадар чија је мера позитивна.

Као и код сваке мере генерисане спољном мером, скуп $E \subset \mathbb{R}^d$ је Lebesgue-ове мере нула ако и само ако је његова спољна мера једнака нули, другим речима ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји низ $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ основних квадара који покрива E и за који је $\sum_{n=1}^\infty m(A_n) < \varepsilon$.